Stetigkeit:

$\boxed{\text{Eine Funktion ist stetig in } x_0\text{, wenn gilt } \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).}$

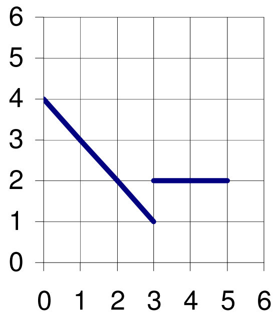
Sie ist stetig in einem Intervall, wenn sie in jeder Stelle stetig ist.
Anschaulich: Wenn die x-Werte „zusammenrutschen“, dann „rutschen“ auch die y-Werte „zusammen“. Die Funktion hat keinen Sprung.

Differenzierbarkeit:

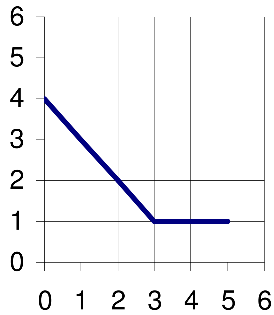
$\boxed{\text{Eine Funktion ist diff´bar in } x_0 \text{ wenn } \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ existiert.}}$

Sie ist diff´bar in einem Intervall, wenn sie in jeder Stelle diff´bar ist.
Anschaulich: Die Funktion hat keinen Sprung und keinen Knick.

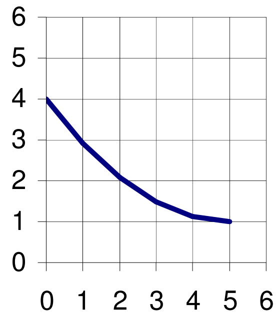
Wenn eine Funktion differenzierbar ist, so ist sie auch stetig. Man sagt Stetigkeit ist notwendig für Differenzierbarkeit aber nicht hinreichend.



nicht stetig und somit nicht differenzierbar



stetig, aber nicht differenzierbar

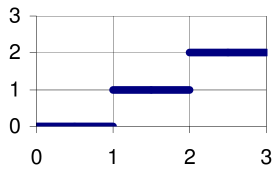


differenzierbar und somit stetig

differenzierbar und nicht stetig gibt es nicht.

Aus den Grenzwertsätzen für Funktionen folgt: Sind zwei Funktionen stetig so sind auch Summe, Differenz, Produkt, Quotient und Verkettung stetig.

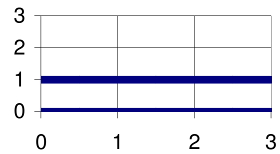
Beispiele für nichtstetige Funktionen:



$y = f(x) = [x]$

Das Größte Ganze, größte ganze Zahl < x

ist für ganze Zahlen nicht stetig
sonst stetig



$$y = f(x) = \begin{cases} 1 \text{ für rationale Zahlen} \\ 0 \text{ für irrationale Zahlen} \end{cases}$$

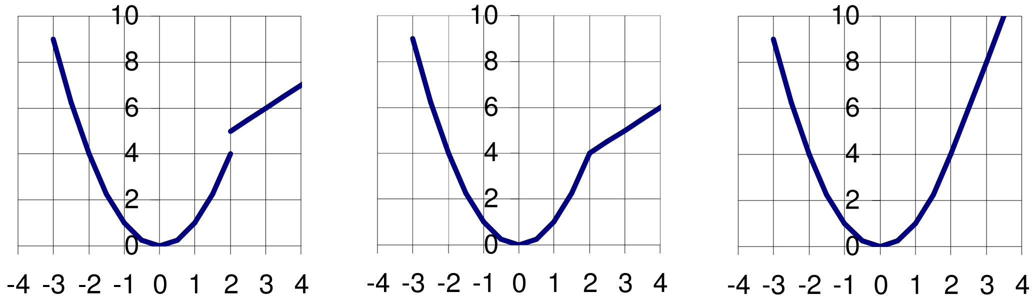
Dirichlet´sche Funktion

ist nirgends stetig

Aufgabe:

Gegeben sind die Funktionenscharen $y = f_{m;n}(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \le 2 \\ mx + n & \text{für } x > 2 \end{cases}$.

Drei Vertreter sind dargestellt



Im Allgemeinen sind diese Funktionen in $x_0=2$ nicht stetig. (Bild 1)

Welche Bedingung muss an m und n gestellt werden, damit die Funktion in $x_0=2$ stetig wird?

Für welches m und n ist die Funktion in $x_0=2$ differenzierbar?