Jede ganzrationale Funktion n-ten Grades lässt sich in n Linearfaktoren zerlegen.
Es gilt: $\boxed{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})(x - x_n).}$
Dabei sind die x_n die reellen Nullstellen des Polynoms.

Beispiel:
$$\boxed{\begin{array}{l} x^2 = (x-0)\cdot(x-0) \\ x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)(x-2)(x-3) \end{array}}$$
Die Nullstellen des zweiten Beispiels sind also -1,2 und 3.

Dies kann man sich bei der Nullstellenfindung zu Nutze machen. Wenn man nämlich eine Nullstelle kennt, so kann man durch Polynomdivision den Grad des Polynoms um 1 reduzieren.
Das Ziel dabei ist, einen Funktionsterm zu erhalten von dem wir schon die Nullstellen berechnen können (lineare Funktion, quadratische Funktion, polyquadratische Funktion)
Dabei hilft folgender
Satz: Hat ein Polynom ganzzahlige Nullstellen, so sind diese Nullstellen Teiler des absoluten Gliedes a_0.
Um ganzzahlige Nullstellen zu finden, probiert man einfach alle Teiler (positiv und negativ) des absoluten Gliedes durch und führt dann einfach eine Polynomdivision durch:
Gibt es keine ganzzahlige Nullstelle ==> *Pech gehabt*

Beispiel: $y = f(x) = \frac{1}{100}(x^4 - 7x^3 - 72x^2 + 108x + 432)$
Die 1/100 dient lediglich um die Funktionswerte zu verkeinern!
Die Teiler der 432 sind $T_{432} = \{\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm6;\pm8;\pm9;\pm12;\pm16;\pm18;\pm24;...\}$
432 hat insgesamt 40 Teiler.

Probieren:

x	f(x)
1	4,62
-1	2,6
2	3,2
-2	0

Das heißt: -2 ist eine Nullstelle.

Jetzt Polynomdivision durch (x Minus Nullstelle)

$$\boxed{(x^4 \quad -7x^3 \quad -72x^2 \quad +108x \quad +432) \quad :(x+2) =}$$

1. Summand : 1.Summand
$x^4 : x = x^3$
Dann „zurück multiplizieren“
$x^3\ (x+2) = x^4 + 2x^3$

$$\begin{array}{lllllll}
 & (x^4 & -7x^3 & -72x^2 & +108x & +432) & :(x+2)=x^3 \\
- & (x^4 & +2x^3) & & & & \\
 & & -9x^3 & -72x^2 & +108x & +432 &
\end{array}$$

Klammern rum, Minus davor, Strich drunter
dann wieder von vorn
1. Summand : 1. Summand:
$-9x^3 : x = -9x^2$
Dann „zurück multiplizieren“
$-9x^2\,(x+2) = -9x^3 - 18x^2$

$$\begin{array}{lllllll}
 & (x^4 & -7x^3 & -72x^2 & +108x & +432) & :(x+2)=x^3-9x^2 \\
- & (x^4 & +2x^3) & & & & \\
 & & -9x^3 & -72x^2 & +108x & +432 & \\
 & - & (-9x^3 & -18x^2) & & & \\
 & & & -54x^2 & +108x & +432 &
\end{array}$$

Klammern rum, Minus davor, Strich drunter
dann wieder von vorn
1. Summand : 1. Summand:
$-54x^2 : x = -54x$
Dann „zurück multiplizieren“
$-54x\,(x+2) = -54x^2 - 108x$

$$\begin{array}{lllllll}
 & (x^4 & -7x^3 & -72x^2 & +108x & +432) & :(x+2)=x^3-9x^2-54x \\
- & (x^4 & +2x^3) & & & & \\
 & & -9x^3 & -72x^2 & +108x & +432 & \\
 & - & (-9x^3 & -18x^2) & & & \\
 & & & -54x^2 & +108x & +432 & \\
 & & - & (-54x^2 & -108x) & & \\
 & & & & 216x & +432 &
\end{array}$$

Klammern rum, Minus davor, Strich drunter
dann wieder von vorn
1. Summand : 1. Summand:
$216x : x = 216$
Dann „zurück multiplizieren“
$216\,(x+2) = 216x + 432x$

$$\begin{array}{rllllll}
 & (x^4 & -7x^3 & -72x^2 & +108x & +432) & :(x+2)=x^3-9x^2-54x+216 \\
- & (x^4 & +2x^3) & & & & \\
 & & -9x^3 & -72x^2 & +108x & +432 & \\
 & - & (-9x^3 & -18x^2) & & & \\
 & & & -54x^2 & +108x & +432 & \\
 & & - & (-54x^2 & -108x) & & \\
 & & & & 216x & +432 & \\
 & & & - & (216x & +432) & \\
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

Demzufolge gilt:

$$y=f(x)=\frac{1}{100}(x^4-7x^3-72x^2+108x+432)=\frac{1}{100}(x^3-9x^2-54x+216)\cdot(x+2)$$

Jetzt muss man wieder Nullstellen probieren, wobei 1, -1 und 2 nicht mehr probiert werden brauchen. Es ist auch egal, ob man beim Ausgangspolynom oder beim reduzierten Polynom probiert. Besser ist jedoch das reduzierte Polynom, hier kann die Nullstelle (-2) noch mal probiert werden.

Probieren:

x	f(x)
3	0
-3	-2,7

Das heißt: +3 ist eine Nullstelle.

Nun wieder Polynomdivision: *(Das Ergebnis ist zu überprüfen!)*

$$\boxed{(x^3-9x^2-54x+216):(x-3)=x^2-6x-72}$$

Wir erhalten jetzt ein quadratisches Polynom, dessen Nullstellen wir berechnen können.

<u>Lösen von polyquadratischen Gleichungen</u>

Def. Eine Gleichung der Form $\boxed{ax^{2k}+bx^k+c=0}$ heißt polyquadratisch.

Beispiel: $x^6+x^3-2=0$

wir ersetzen $x^3=z$

somit wird $z^2+z-2=0$

Die Lösungsformel ergibt: $z_{1/2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}$

und $z_1=-2$ und $z_2=1$

wir ersetzen jetzt zurück $x=\sqrt[3]{z}$

und erhalten $x_1=\sqrt[3]{-2}\approx-1{,}26$ und $x_2=\sqrt[3]{1}=1.$

Beispiel: $x^4 - 21x^2 + 20 = 0$

wir ersetzen $x^2 = z$

somit wird $z^2 - 21z + 20 = 0$

Die Lösungsformel ergibt: $z_{1/2} = \frac{21}{2} \pm \sqrt{\frac{441}{4} - 20}$

und $z_1 = 1$ und $z_2 = 20$

wir ersetzen jetzt zurück $x = \sqrt{z}$

und erhalten $x_{1/2} = \pm\sqrt{20}$ und $x_{3/4} = \pm\sqrt{1}$.

Aufgaben: Bestimmen Sie die Nullstellen von $y = f(x) = x^4 - 21x^2 + 20$ mit Hilfe der Polynomdivision!

Bestimmen Sie alle Nullstellen von $y = f(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 - 4x^2 + 12x$!

Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion (Grenzwerte für +/- unendlich, Symmetrie, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte, Skizze) durch!

a) $y = f(x) = x^4 - 21x^2 + 20$

b) $y = f(x) = x^3 + x^2 - x$

c) $y = f(x) = -\frac{1}{9}(x^4 - 4x^3 + 27)$

d) $y = f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 6$

Skizzen als Vergleich