

Problemstellung

Es werden Bauteile hergestellt; in etwa zu gleichen Teilen Bauteile der Qualität A (20% Ausschuss) und Bauteile der Qualität B (40% Ausschuss). Diese Produkte werden in Kisten verpackt, die Jahresproduktion beträgt 100.000 Kisten. Jetzt gibt es unsere berühmten Kisten, deren Qualität nicht zuzuordnen ist. Das passiert recht häufig, etwa in einem Prozent der Fälle. Dabei gibt es folgende Optionen:

- Die Kiste wird richtig zugeordnet.
- Die Kiste wird als gute Qualität verkauft; obwohl sie Teile schlechter Qualität enthält. Dabei entsteht ein Verlust von ca. 10.000 € pro Kiste aufgrund von Regressforderungen usw.
- Die Kiste wird als schlechte Qualität verkauft; obwohl sie Teile guter Qualität enthält. Dabei entsteht ein Verlust von ca. 1.000 € pro Kiste, da sie ja unter Wert verkauft wird.

Es gibt die Möglichkeit, Teile zu entnehmen und auf ihre Qualität zu prüfen, eine Prüfung kostet 5 €. Außerdem wird noch der Vorschlag unterbreitet, farbige Kisten zu verwenden, dabei entstehen allerdings Mehrkosten in Höhe von 10 € pro Kiste.

Entscheidungsverfahren ohne Prüfung

Die Kiste wird grundsätzlich als gute Qualität verkauft.

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer nicht zuzuordnenden Kiste beträgt 0,01. Problematisch wird es, wenn man jetzt eine schlechte Kiste hat. Da die Wahrscheinlichkeit eine Kiste schlechter Qualität zu haben 0,5 ist („in etwa zu gleichen Teilen A oder B“) erhält man als Erwartungswert:

$$E = 0,01 \cdot 100.000 \cdot 0,5 \cdot 10.000 \text{ €} = 5 \text{ Mio €}$$

Das heißt, man hat mit einem jährlichen Verlust von 5 Mio € zu rechnen.

Die Kiste wird grundsätzlich als schlechte Qualität verkauft.

Problematisch wird es, wenn man jetzt eine gute Kiste hat. Da die Wahrscheinlichkeit eine Kiste guter Qualität zu haben auch wieder 0,5 ist, erhält man als Erwartungswert:

$$E = 0,01 \cdot 100.000 \cdot 0,5 \cdot 1.000 \text{ €} = 0,5 \text{ Mio €}$$

Das heißt, man hat mit einem jährlichen Verlust von 0,5 Mio € zu rechnen.

Es werden farbige Kisten verwendet.

Dabei ergeben sich jährliche Mehrkosten von

$$100.000 \cdot 10 \text{ €} = 1 \text{ Mio €}.$$

Man wird sich also dafür entscheiden, die Kiste grundsätzlich als schlechte Qualität zu verkaufen.

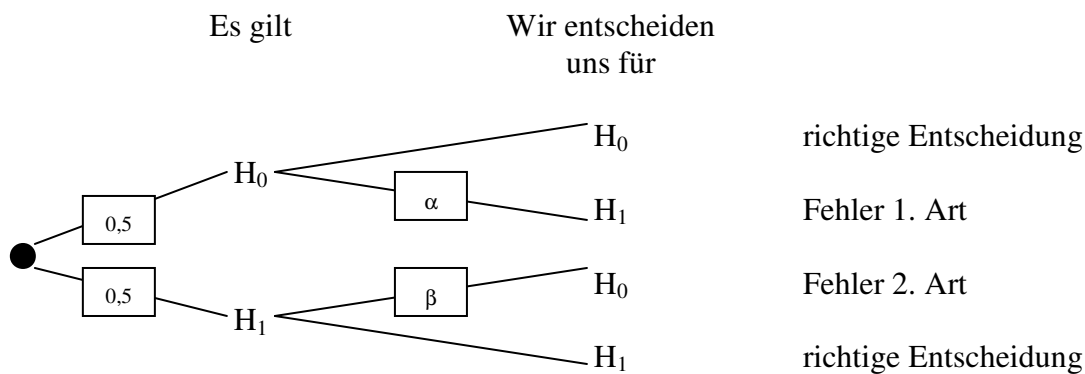
Entscheidungsverfahren mit Prüfung

Es wird jetzt nur noch der Fall betrachtet, das eine Kiste nicht zuzuordnen ist. Hier ergeben sich dann Verlusterwartungen in Höhe von 5.000 € (Fehler 1. Art) bzw. 500 € (Fehler 2. Art). Hier stellt sich dann die Frage, kann man den Verlust von 500 € pro Kiste durch eine Prüfung der Bauteile nach unten drücken, wohl wissend, dass sich dadurch Mehrausgaben ergeben. Man prüft jetzt also eine gewisse Anzahl von Teilen; wenn recht viele Teile mangelhaft sind entscheidet man sich für H_0 .

X	:	Anzahl der Ausschussteile in der Prüfkiste
H_0	:	Die Kiste ist von schlechter Qualität, $p=0,4$
H_1	:	Die Kiste ist von guter Qualität, $p=0,2$

Die Wahl der Bezeichnungen der Hypothesen ist beliebig, allerdings hier schon so gewählt, dass der Fehler 1. Art, nämlich die wahre Nullhypothese abzulehnen, der teurere ist.

In dieser Aufgabe, kennen wir die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten von H_0 bzw. H_1 . Das war in den anderen Aufgabenstellungen nicht der Fall. Deshalb stehen wir hier schon wieder vor einem Interpretationsproblem. Schauen wir uns das mal an einem Baumdiagramm an.



Für die Fehlerwahrscheinlichkeiten gilt:

$$\begin{aligned}\alpha &= B_{n,0,4}(X \leq k) \\ \beta &= B_{n,0,2}(X > k) \\ &= 1 - B_{n,0,2}(X \leq k)\end{aligned}$$

Bei zunächst beliebig festgelegtem Stichprobenumfang von 10 und auch beliebigem $k=2$ ergeben sich laut Tabelle im Tafelwerk

$$\begin{aligned}\alpha &= B_{n,0,4}(X \leq k) \\ &= 0,1673 \\ \beta &= B_{n,0,2}(X > k) \\ &= 1 - B_{n,0,2}(X \leq k) \\ &= 0,3222\end{aligned}$$

und infolgedessen ein erwarteter Verlust von

$$\begin{aligned}E &= 0,5 \cdot \alpha \cdot 10.000 \text{ €} + 0,5 \cdot \beta \cdot 1.000 \text{ €} + n \cdot 5 \text{ €} \\ &= 1.047,60 \text{ €}\end{aligned}$$

Das ist immerhin schon weniger als 5.000 €.

Der Mathematiker wird also eine Excel®-Tabelle entwerfen und dort ablesen, dass in diesem Fall die Entscheidungsregel

„Man prüfe 50 Teile. Bei mehr als 12 fehlerhaften lege man Qualität B fest“
den geringsten Verlust zur Folge hat, nämlich 409,28 €.

Das spart im Jahr gegenüber der Methode ohne Prüfung fast 100.000 €.

Die Firma baut eine 2. Produktionsanlage der Qualität A.

Der Mathematiker modifiziert seine vorbildlich gespeicherte Tabelle und liest ab:

„Man prüfe 55 Teile. Bei mehr als 14 fehlerhaften lege man Qualität B fest“