2. Übungsserie
Mathematik Klasse 12
gebrochenrationale Funktionen

1. Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion (Symmetrie, Asymptoten, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrempunkte, Wendepunkte, Skizze) für die Funktion $y = f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot \frac{x^3}{x^2 - 4}$ durch!

2. Zu jedem reellen, nicht verschwindenden Parameter t ist eine Funktion durch die Gleichung $y = f_t(x) = 2t \cdot \frac{x-1}{x^2 - tx + t}$ gegeben. Ihr Graph sei G_t.

2.1. Untersuchen Sie G_2 auf Asymptoten, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrempunkte, Wendepunkte! Fertigen Sie eine Skizze an! Weisen Sie nach, dass gilt:

$$f_2'''(x) = -24 \cdot \frac{x^4 - 4x^3 + 8x - 4}{\left(x^2 - 2x + 2\right)^4}$$

Hinweise: Zum Überprüfen der Existenz der Wendepunkte genügt es, die Näherungswerte der Wendestellen in die 3. Ableitung einzusetzen.

2.2. Weisen Sie nach, dass G_2 entsteht, indem man den Graphen der Funktion $y = h(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$ um eine Einheit in positive x-Richtung verschiebt!

2.3. Untersuchen Sie G_t für allgemeines t auf Asymptoten, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und Extrempunkte.

2.4. Weisen Sie nach, dass die Bestimmung der Wendepunkte von G_t auf die Gleichung $0 = x^3 - 3x^2 + t$ führt.

Stellen Sie die Anzahl der Wendepunkte in Abhängigkeit von t tabellarisch dar! Verzichten Sie dabei auf den Nachweis der Existenz der Wendepunkte.

Hinweise: Die Wendestellen sind die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion dritten Grades g(x). Treffen Sie Aussagen über die Anzahl der Nullstellen dieser Funktion, indem Sie Bekanntes über den Verlauf der Funktion g(x) verwenden und die Extrempunkte der Funktion g(x) benutzen.