

Hinweise für Schüler**Aufgabenauswahl**

Von den vorliegenden Aufgaben sind die Pflichtaufgaben P1 und P2 zu lösen. Von den Wahlaufgaben W3 bis W6 sind 2 Aufgaben auszuwählen und vollständig zu bearbeiten.

Bearbeitungszeit

Die Arbeitszeit beträgt 300 Minuten zuzüglich 30 Minuten für die Auswahl der Wahlaufgaben.

Hilfsmittel

Tafelwerk

nichtprogrammierbarer und nichtgraphikfähiger Taschenrechner

Duden

Zeichengeräte

Die Tangentenbedingung lautet: $(x_M m + n - y_M)^2 = (1 + m^2)r^2$

Sonstiges

Die Lösungen sind in einer sprachlich einwandfreien und mathematisch exakten Form darzustellen.

Graphische Darstellungen müssen auf Millimeterpapier erfolgen.

Lösungswege müssen erkennbar sein.

Entwürfe können ergänzend zur Bewertung nur herangezogen werden, wenn sie zusammenhängend konzipiert sind und die Reinschrift etwa $\frac{3}{4}$ des erkennbar angestrebten Gesamtumfanges umfasst.

Werden mehr als zwei Wahlaufgaben bearbeitet, so gehen die beiden mit der höchsten Punktzahl in die Bewertung ein.

P1 rationale Funktionen / analytische Geometrie

1. Für jeden positiven Parameter a sind eine Funktion $f_a(x)$ durch

$$y = f_a(x) = \frac{1}{2a}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}ax$$

sowie eine Gerade g_a durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3a^2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -a \\ a^2 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$$

gegeben. Die Graphen heißen K_a .

- 1.1. Bestimmen Sie für die Graphen der Funktionen der Schar die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, der Extrem- und Wendepunkte. Bestimmen Sie die Art der Extrema, weisen Sie die Existenz des Wendepunktes nach!

Stellen Sie die Kurve sowie die Gerade für $a=1$ in einem Koordinatensystem graphisch dar!

Kontrolle: $H(a|2a^2)$; $W(2a|a^2)$; $T(3a|0)$

- 1.2. Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve der Wendepunkte!
- 1.3. Für jedes a schließen K_a und der Graph der Funktion $y = h(x) = 0,25x^2$ zwei Flächen ein.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, deren Rand den Koordinatenursprung enthält!
Für welches a beträgt der Flächeninhalt 63 FE?
- 1.4. Weisen Sie nach, dass auf g_a die Extrem- und Wendepunkte von K_a liegen und geben Sie eine Koordinatengleichung von g_a an!
- 1.5. Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Wendetangenten von K_a !
- 1.6. Bestimmen Sie den Schnittwinkel der Wendetangenten von K_1 und der Geraden g_1 !

P2 nichtrationale Funktionen

2. Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = (2 - x) \cdot e^x$. Der Graph G.
- 2.1. Bestimmen Sie für den Graphen der Funktion die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, der Extrem- und Wendepunkte. Bestimmen Sie die Art der Extrema, weisen Sie die Existenz des Wendepunktes nach! Stellen Sie den Graphen in einem Koordinatensystem dar!
- 2.2. Weisen Sie durch partielle Integration nach, dass durch $y = F(x) = (3 - x) \cdot e^x$ eine Stammfunktion der Funktion $f(x)$ gegeben ist!
- 2.3. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A, die durch die Koordinatenachsen und G begrenzt wird sowie $\lim_{k \rightarrow -\infty} \int_k^2 f(x) dx$!
- Kontrolle: $A = e^2 - 3$*
- 2.4. Die Punkte $O(0|0)$, $P(0|f(u))$ und $Q(u|f(u))$ bilden für jedes u mit $0 < u < 2$ ein Dreieck.
Bestimmen Sie dasjenige u , so dass der Flächeninhalt des Dreiecks ein Maximum wird. (auf den Nachweis, der Art des Extremums wird verzichtet)
- 2.5. Bestimmen Sie mithilfe eines geeigneten Näherungsverfahrens dasjenige u auf zwei Dezimale genau, so dass die Gerade $x = u$ mit $0 < u < 2$, die Fläche A (aus Aufgabe 2.3.) halbiert.

W3 rationale Funktionen

3. Gegeben sind die Funktionen f_a durch $y = f_a(x) = \frac{10x}{(x+a)^2}$; $x, a \in \mathbb{R}$; $x \neq -a$.

Die zugehörigen Graphen werden mit F_a bezeichnet.

- 3.1. Kurvendiskussion

Ermitteln Sie die Nullstellen und die Polstellen der Funktionen und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionen im Unendlichen! Ermitteln Sie die Art und Lage der lokalen Extrempunkte der Graphen für die Fälle $a < 0$, $a = 0$ und $a > 0$!

Zeichnen Sie den Graphen F_1 im Intervall $-8 \leq x \leq 8$!

$$\text{Kontrolle: } f''(x) = \frac{20(x-2a)}{(x+a)^4}$$

- 3.2. Begründen Sie, dass unabhängig vom Wert des Parameters a die Graphen weder im II. noch im IV. Quadranten liegen können!

- 3.3. Weisen Sie nach, dass $f_a(x) = -f_{-a}(-x)$ gilt und interpretieren Sie diese Gleichung mit Blick auf die Graphen der Funktionen f_a und f_{-a} !

- 3.4. Weisen Sie nach, dass die Funktion g mit $y = g(x) = 10 \ln(-x-1) + \frac{10}{x+1}$ eine Stammfunktion der Funktion f_1 für $x < -1$ ist!

W4 rationale Funktionen / lineare Gleichungssysteme

4. Gegeben ist die Funktionen f durch $y = f(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{2x - 4}$; $x \in \mathbb{R}$.

4.1. Kurvendiskussion

Untersuchen Sie die Funktion f auf Null- und Polstellen und weisen Sie nach, dass die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x + 3$ eine Asymptote des Graphen der Funktion f ist.

Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion f !

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $-8 \leq x \leq 8$!

$$\text{Kontrolle: } f''(x) = \frac{7}{(x-2)^3}$$

4.2. Der Graph der Funktion f und die x -Achse schließen eine Fläche ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Inhaltes dieser Fläche.

4.3. Von einer Funktion der Form $y = f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{cx + d}$ sind folgende Eigenschaften bekannt

- Eine Nullstelle ist 2.
- Die Polstelle ist 0.
- Die Funktion hat an der Stelle 1 den Funktionswert -2 .
- Der Graph der Funktion hat an der Stelle 1 den Anstieg 3.
-

Ermitteln Sie dafür die Werte der Parameter a , b , c , d !

W5 Geometrie der Ebene

5.1 Ein Kreis um $M(-3|-1)$ hat die Gerade g mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 19 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}$ als Tangente.

5.1.1 Ermitteln Sie eine Gleichung für diesen Kreis!

$$\text{Kontrolle: } k : (x+3)^2 + (y+1)^2 = \sqrt{85}^2$$

5.1.1 Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten, die senkrecht zur Geraden g verlaufen!

5.2. Gegeben ist der Kreis k durch den Mittelpunkt $M(2|3)$ und $r^2=10 \text{ cm}^2$ sowie der Punkt $P(-3|8)$.

5.2.1. Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichungen der Tangenten von P an k sowie die Koordinaten der Berührungspunkte B_1 und B_2 !

$$\text{Kontrolle: } B_1(-1|2); B_2(3|6)$$

5.2.2. Stellen Sie den Kreis und die Tangenten in einem geeigneten Koordinatensystem grafisch dar!

5.2.3. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche PB_1B_2 (begrenzt durch die Tangenten und den Kreis)!

W6 Geometrie des Raumes

6. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Gleichung der Geraden g_1 durch $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$ sowie die Punkte $A(5; 5; 4)$, $B(7; 10; 4)$ und $S(5; 7; 9; 6)$ gegeben.
- 6.1. Die Punkte A und B bestimmen die Gerade g_2 .
Zeichnen Sie die Geraden g_1 und g_2 in ein kartesisches Koordinatensystem!
Zeigen Sie, dass die Geraden g_1 und g_2 parallel zueinander verlaufen und dass die Gerade g_1 in der xy-Ebene liegt!
- 6.2. Die Geraden g_1 und g_2 liegen in einer Ebene E_1 !
Stellen Sie eine Gleichung für die Ebene E_1 in Koordinatenform auf!
Weisen Sie nach, dass die Ebene E_1 orthogonal zur xy-Ebene ist!
- 6.3. Die Punkte A, B und S seien Eckpunkte eines Dreiecks.
Zeigen Sie, dass dieses Dreieck gleichschenkelig ist und berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.
- 6.4. Auf der Geraden g_1 existieren zwei Punkte C und D derart, dass das Viereck ABCD ein Rechteck ist.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte C und D.