1. Übungsserie Mathematik Klasse 11c
- Zahlenfolgen -

1. Die Titius-Bode-Reihe ist eine von Johann Daniel Titius (1729-1796) empirisch gefundene und von Johann Elert Bode (1747-1826) bekannt gemachte numerische Beziehung, nach der sich die Abstände der meisten Planeten von der Sonne mit einer einfachen mathematischen Formel näherungsweise allein aus der Nummer ihrer Reihenfolge herleiten lassen.

1.1. In einem Buch aus dem Jahre 1921 heißt es dazu: „Der mittlere Sonnenabstand des Saturn beträgt ... rund 200 Millionen Meilen. ...
Merkur 8 + 0 x 6 Millionen Meilen
Venus 8 + 1 x 6 ...
Erde 8 + 2 x 6 ...
Mars 8 + 4 x 6 ...
[Asteoridengürtel 8 + 8 ...]
Jupiter ...“

1.1.1. Finde eine sinnvolle Umrechnung Meilen-Kilometer! Verwende die Bahndaten der Erde!
1.1.2. Setze die Folge fort, gib eine explizite und eine rekursive Bildungsvorschrift an!
1.1.3. Prüfe, wie sich die erst 1846 bzw. 1930 entdeckten Himmelskörper Neptun und Pluto in diese Folge einfügen!

1.2. Johann Friedrich Wurm hat im Jahre 1787 eine „moderne“ Formel veröffentlicht: $a_n = 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^n$. Der Exponent nimmt dabei beginnend bei Merkur die Werte $\{-\infty, 0, 1, 2, \ldots\}$ an.

1.2.1. Wie lautet die Einheit des Ergebnisses?
1.2.2. Berechne und vergleiche die Werte einschließlich Pluto und Xena!

1.3. In einem Mathematiklehrbuch aus dem Jahre lautet eine Formel $a_n = a_0 \cdot 1{,}8^n$. Der Exponent nimmt dabei beginnend bei Merkur die Werte $\{-2, -1, 0, \ldots\}$ an.

1.3.1. Berechne a_0!
1.3.2. Berechne und vergleiche!

1.4. Versuche, eine möglichst „exakte“ Folge für die mittleren Abstände der Planeten beginnend mit dem Exponenten 1 zu finden.

1.5. Äußere dich zum wissenschaftlichen Wert der Titius-Bode-Reihe!

2. Es gibt mehrere Näherungsverfahren, die es ermöglichen, den Wert einer Quadratwurzel mit beliebiger Genauigkeit zu ermitteln. Näherungsverfahren liefern eine Folge von Näherungswerten. Alle Taschenrechner arbeiten intern damit. (siehe auch Hefter Klasse 9).
Jede Quadratwurzel aus einer Nicht-Quadratzahl liegt zwischen zwei Quadratzahlen; $\sqrt{11}$ zwischen 3 und 4 oder $\sqrt{0{,}3}$ zwischen 0 und 1. Deshalb wählt man als Startwert dieser Folge, gewissermaßen als ersten Näherungswert eine kleinere Quadratzahl „in der Nähe aus". Wir nennen sie a_1. Für die Bestimmung von $\sqrt{k}$ gilt dann $a_1^2 < k$. Das x in der Gleichung $a_1 \cdot x = k$ ist dann notwendigerweise größer als $\sqrt{k}$. Das x lässt sich aber bestimmen zu $x = \frac{k}{a_1}$. Ein weiterer Näherungswert ist dann aber das arithmetische Mittel der beiden Zahlen a_1 und x; also $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + x) = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{k}{a_1}\right)$ und folglich $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{k}{a_n}\right)$.

2.1. Führe dieses Näherungsverfahren für ausgewählte Zahlen durch!

2.2. Ermittle eine Gleichung für die Berechnung von a_3 unmittelbar aus a_1!

2.3. Was schlussfolgerst Du für die Existenz einer expliziten Bildungsvorschrift?

2.4. Prüfe ob die Gleichung $a_3 = \frac{1}{2^{3-1}} \cdot \frac{\left(a_1^{3-1} + 3k\right)^{3-1} - 2^3 \cdot k^{3-1}}{a_1^{3-1} + a_1 k}$ eine Gleichung entsprechend 2.2. ist!

2.5. Stimmt dann $a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{\left(a_1^{n-1} + 3k\right)^{n-1} - 2^n \cdot k^{n-1}}{a_1^{n-1} + a_1 k}$?

3. Ein Fadenpendel der Länge 1 m wird um 20° ausgelenkt und dann losgelassen. Infolge der Reibung erreicht es bei jedem Umkehrpunkt nur 99% der Höhe im vorigen Umkehrpunkt.

3.1. Gib eine Gleichung für die in den Umkehrpunkten erreichten Höhen in expliziter und rekursiver Form an!

3.2. Nach wie vielen Schwingungen beträgt die erreichte Höhe nur noch 1 cm? Beachte, dass zu einer Schwingung 2 Umkehrpunkte gehören!

3.3. Wie lange schwingt das Pendel, wenn man davon ausgeht, dass die Schwingung bei einer Auslenkung von 0,1° [0,01°] beendet ist?