Beispielaufgaben Kurvenscharen
- Klausurniveau -

1. Gegeben ist eine Funktionenschar durch

$$y = f_t(x) = \frac{1}{t}x^3 - \frac{3}{t}x^2 + x;\ \ x;t \in IR, t \neq 0 .$$

1.1 Kurvendiskussion

1.1.1 Bestimmen Sie Anzahl und Lage der Nullstellen in Abhängigkeit vom Scharparameter!

1.1.2 Bestimmen Sie Anzahl, Art und Lage der lokalen Extremstellen in Abhängigkeit vom Scharparameter!

1.1.3 Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes!

1.1.4 Stellen Sie die Funktionen $f_{-1}(x), f_1(x)$ und $f_2(x)$ grafisch dar!

1.2 Bestimmen Sie die Schargleichung der Wendenormalen!

1.3 Weisen Sie nach, dass alle Funktionen der Schar, zwei gemeinsame Punkte haben und berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte!

2. Gegeben ist eine Funktionenschar durch

$$y = f_t(x) = \frac{1}{t}(x-t)^2(x+t);\ \ \ x;t \in IR, t \neq 0.$$

2.1 Weisen Sie nach, dass für alle Funktionen der Schar die Funktionalgleichung $f_{-t}(-x) = f_t(x)$ gilt! Wie spiegelt sich dies in der graphischen Darstellung von $f_t(x)$ und $f_{-t}(x)$ wider?

2.2 Kurvendiskussion

2.2.1 Bestimmen Sie für die Funktionen der Schar die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen!

2.2.2 Bestimmen Sie die Koordinaten der Extrempunkte und weisen Sie die Art der Extrema nach!

2.2.3 Bestimmen Sie die Koordinaten der Wendepunkte und weisen Sie die Existenz des Wendepunktes nach!

2.2.4 Stellen Sie die Funktionen $f_{-1}(x)$, $f_1(x)$ und $f_2(x)$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem graphisch dar!

2.3 Bestimmen Sie die Schargleichung der Wendenormalen!

2.4 Alle Wendepunkte der Funktionen der Schar liegen auf einer Kurve.

2.4.1 Geben Sie die Gleichung dieser Kurve an!

2.4.2 Zeichnen Sie den Graphen der Ortskurve der Wendepunkte in das schon vorhandene Koordinatensystem.

2.5. Für jedes t bilden die Schnittpunkte der Funktion mit der Abszisse und der lokale Maximumpunkt ein Dreieck. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

3.1 Geben Sie alle Funktionen der Form $y = f(x) = ax^3 + bx + c;\ a \neq 0$ an, die die x-Achse bei 2 und die y-Achse bei 4 schneiden!

Zur Kontrolle: $y = f(x) = ax^3 - (2 + 4a)x + 4;\ a \neq 0$

3.2 Weisen Sie nach, dass alle diese Funktionen den Wendepunkt W(0|4) besitzen!

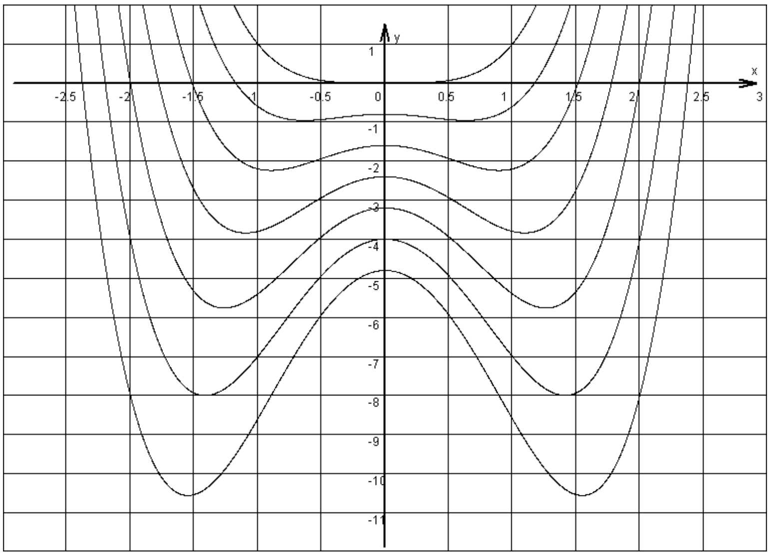
3.3 Welche dieser Funktionen hat im Wendepunkt den Anstieg -4?

3.4 Für welche a existieren keine lokalen Extrema?

4. Für jeden nichtnegativen reellen Parameter t ist eine Funktion definiert durch:

$$y = f_t(x) = x^4 - t \cdot x^2 - t \qquad ;t \in \mathrm{IR}; t \geq 0$$

In nachfolgender Skizze sind einige Vertreter dieser Funktionenschar dargestellt.



4.1.1 Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion (Symmetrie, Grenzwerte für x gegen +/- unendlich, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte) für die Funktion $f_1(x) = x^4 - x^2 - 1$ durch!

4.1.2 Berechnen Sie die Gleichungen der beiden Wendetangenten von $f_1(x)$!

4.1.3 Stellen Sie $f_1(x)$ und die beiden Wendetangenten graphisch dar!

4.2 Welche der Funktionen verläuft durch den Punkt (1;-1)?

4.3 Welche der Funktionen hat die Nullstellen -2 und 2?

4.4 Alle Minima der Graphen der Schar liegen auf einer Kurve. Geben Sie die Gleichung der Kurve an!

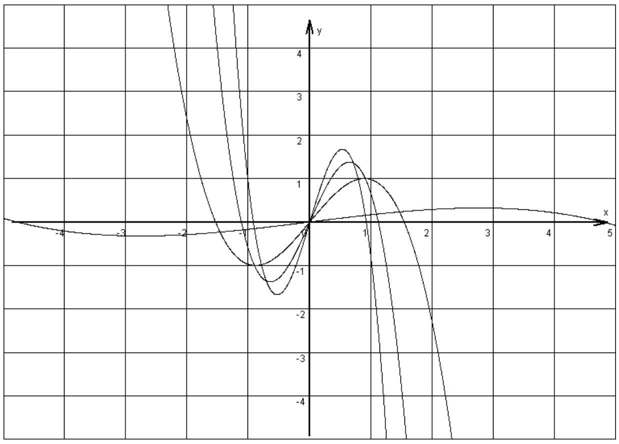
5. Für jeden positiven Wert t ist eine Funktion gegeben durch

$$y = f_t(x) = (x - 3t)\sqrt{x}\ .$$

Der Graph der Funktion f_t sei G_t.

a) Bestimmen Sie für G_t die Schnittpunkte mit den Achsen sowie den Extrempunkt!
b) Weisen Sie nach, dass G_t keine Wendepunkte besitzt!
c) Zeichnen Sie die Kurven $G_{1/3}$ und G_1 in ein gemeinsames Koordinatensystem!
c) Weisen Sie nach dass alle Kurven der Schar nur einen gemeinsamen Punkt besitzen!
d) Welche Kurve läuft durch A(2;-2)?
e) Welche Kurve hat bei x=2 ihr Extremum?
f) Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve, auf der alle Extrema der Schar liegen!

6.1 Die Skizze zeigt einige Vertreter der Schar $y = f_a(x) = -\frac{a^2}{4}x^3 + ax;\quad a > 0$.



6.1.1 Bestimmen Sie die Schnitt***punkte*** mit den Koordinatenachsen, die Maximum***stelle***, die Minimum***stelle*** und den Wende***punkt***!
6.1.2 Bestimmen Sie die Funktion der Schar, deren Graph
- durch (1;1) verläuft,
- bei 1 die x-Achse schneidet,
- die Maximumstelle bei 1 hat,
- den Wendepunkt bei 1 hat!

7. Weisen Sie nach, dass es keine ganzrationale Funktion 3. Grades mit genau einer Extremstelle geben kann!

8.1 Gegeben ist die Funktionenschar $y = f_a(x) = (x - a)^2 + 3a^2;\ x, a \in IR;\ a > 0.$
8.1.1 Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden Ursprungstangenten an die Graphen von $f_a(x)$!
8.1.2 Stellen Sie die Funktion und die beiden Tangenten für a=1 graphisch dar!

9. Gegeben ist die Funktionenschar $y = f_t(x) = \frac{1}{t}x^4 + x^3; \quad x, t \in IR; t > 1$.

9.1 Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, die Extrem- und Wendepunkte!

9.2. Untersuchen Sie den Graphen auf Symmetrie!

9.3 Stellen Sie die Graphen der Funktionen für $t = 1;2;3$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem graphisch dar!

9.4 Bestimmen Sie die Schargleichung der Wendetangenten!

9.5 Bestimmen Sie die Ortskurven der Minima und der Wendepunkte und zeichnen Sie die Graphen der beiden Ortskurven in das schon vorhandene Koordinatensystem!

10.1 Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit

$$f_a(x) = -\frac{1}{a}x^3 + ax^2, \quad x \in IR, a \in IR, a > 0.$$

10.1.1 Bestimmen Sie für die Graphen von f_a die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachen, der Extrempunkte und der Wendepunkte!

10.1.2 Alle Extrempunkte liegen auf einer Kurve. Geben Sie eine Gleichung dieser Ortskurve an!

10.1.3 Welcher Zusammenhang muss zwischen dem Scharparameter a und dem Anstieg m einer Ursprungsgerade bestehen, damit der Graph der Funktion und die Ursprungsgerade genau 2 Schnittpunkte haben?
Geben Sie die Koordinaten dieser Schnittpunkte an!

10.1.4 Begründen Sie, dass keine Wendetangente der Schar eine Ursprungsgerade ist!

10.2 Gegeben ist weiterhin die Funktionenschar g_a durch

$$g_a(x) = ax^2 + \frac{1}{a}, \quad x \in IR, a \in IR, a > 0.$$

10.2.1 Zeigen Sie, dass die Graphen von f_a und g_a für jedes a genau einen gemeinsamen Punkt haben und die Abszisse dieses Punktes von a unabhängig ist!