

Hinweise für Schüler**Aufgabenauswahl**

Von den vorliegenden Aufgaben sind die Pflichtaufgaben P1, P2, P3 und P4 zu lösen.
Von den Wahlaufgaben W5, W6 und W7 sind 2 Aufgaben auszuwählen und vollständig zu bearbeiten.

Bearbeitungszeit

Die Arbeitszeit beträgt 300 Minuten zuzüglich 30 Minuten für die Auswahl der Wahlaufgaben.

Hilfsmittel

Tafelwerk
nichtprogrammierbarer und nichtgraphikfähiger Taschenrechner
Duden
Zeichengeräte

Sonstiges

Die Lösungen sind in einer sprachlich einwandfreien und mathematisch exakten Form darzustellen.

Graphische Darstellungen müssen auf Millimeterpapier erfolgen.

Lösungswege müssen erkennbar sein.

Entwürfe können ergänzend zur Bewertung nur herangezogen werden, wenn sie zusammenhängend konzipiert sind und die Reinschrift etwa $\frac{3}{4}$ des erkennbar angestrebten Gesamtumfanges umfasst.

P1 Zahlenfolgen

1. Gegeben ist eine Zahlenfolge (s_n) durch $s_n = \frac{3n}{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}; n \geq 1$)
- 1.1. Berechnen Sie die ersten 6 Glieder dieser Folge und stellen Sie die Folge für $1 \leq n \leq 6$ graphisch dar!
- 1.2. Weisen Sie durch eine exakte Monotonieuntersuchung nach, dass die Folge monoton wächst!
- 1.3. Ermitteln Sie den Grenzwert der Folge (s_n) ! Wie viele Glieder der Folge sind kleiner als 2,95?
- 1.4. Die Folge (s_n) ist Partialsummenfolge einer Zahlenfolge (a_n) .
- 1.4.1. Begründen Sie, dass (a_n) eine Nullfolge sein muss!
- 1.4.2. Berechnen Sie $a_1; a_2; a_3$ und weisen Sie nach, dass (a_n) weder eine arithmetische noch eine geometrische Zahlenfolge ist!
- 1.4.3. Geben Sie eine explizite Bildungsvorschrift für das allgemeine Folgenglied der Folge (a_n) an!

P2 rationale Funktionen

2. Für jeden reellen Parameter t ist eine Funktion f_t gegeben durch:
- $$f_t(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 6x + t; (x \in \mathbb{R})$$
- Die Graphen von f_t heißen G_t .
- 2.1. Kurvendiskussion
- 2.1.1. Untersuchen Sie G_t auf Extrem- und Wendepunkte!
- 2.1.2. Für welchen Parameterwert t liegt der Hochpunkt von G_t auf der x -Achse?
- 2.1.3. Berechnen Sie die Schnittpunkte von G_0 mit der x -Achse!
- 2.1.4. Zeichnen Sie G_0 für $-4 \leq x \leq 4$ mit $1 \text{ LE} = 1 \text{ cm}$ in ein Koordinatensystem!
- 2.2. Zeichnen Sie den Graphen H der Funktion $y = h(x) = \frac{1}{4}x^3$ in das schon bestehende Koordinatensystem
- 2.3. H zerlegt die Fläche zwischen G_0 und der positiven x -Achse in zwei Teilflächen.
Berechnen Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen!

P3 Geometrie des Raumes

3. Gegeben sind die Punkte
 $A(2;0;5)$, $B(3;1;5)$, $C(3;2;6)$, $D(3;4;-1)$ und $E(-3;-10;9)$.
- 3.1. Ermitteln Sie eine Parameter- und eine Koordinatengleichung der Ebene ε_1 , die die Punkte A, B und C enthält!
- 3.2. Berechnen Sie den Abstand des Punktes D von der Ebene ε_1 !
- 3.3. In welchem Punkt S durchstößt die Gerade DE die Ebene ε_1 ? Berechnen Sie den Winkel zwischen der Gerade DE und der Ebene ε_1 !
- 3.4. Geben Sie eine Gleichung der Ebene ε_2 an, die durch D geht und parallel zu ε_1 verläuft! Ermitteln Sie eine Gleichung einer Ebene ε_3 , die durch D geht und orthogonal zu ε_1 ist!
- 3.5. Gegeben sind die Ebenen

$$\varepsilon_4 : \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_5 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} c \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie a, b und c für den Fall, dass die Ebenen ε_4 und ε_5 identisch sind!

P4 Stochastik

4. Ein Textilhersteller bietet dem Handel eine Lieferung von Hemden und Hosen „2. Wahl an“. Der Anteil der Hosen, die einen Produktionsfehler aufweisen, liegt bei 8%. Bei den Hemden sind 20% fehlerhaft.
- 4.1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Qualitätskontrolle von 8 zufällig ausgewählten Hosen genau 2 Hosen Produktionsfehler aufweisen?
- 4.2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Qualitätskontrolle von 8 zufällig ausgewählten Hosen mehr als zwei Hosen Produktionsfehler aufweisen?
- 4.3. Händler xyz hat 20 Hemden und 20 Hosen in einer bestimmten Größe gekauft. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, kein fehlerfreies Set bestehend aus Hemd und Hose zu erwischen!

W5 rationale Funktionen

5. Für jede nichtnegative reelle Zahl a ist eine Funktion f_a in folgender Weise

$$\text{definiert: } y = f_a(x) = \frac{(x+a)^2}{x-1} \quad (a \in \mathbb{R}^{\geq 0}).$$

Der Graph der Funktion f_a sei G_a .

5.1. Kurvendiskussion

5.1.1. Bestimmen Sie die Schnittpunkte von G_a mit den Koordinatenachsen.

5.1.2. Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten an G_a an

5.1.3. Bestimmen Sie die Extrempunkte von G_a und weisen Sie die Art der Extrema nach!

5.1.4. Überprüfen Sie G_a auf Wendepunkte!

5.1.5. Stellen Sie die Funktionen f_0 und f_2 in einem gemeinsamen Koordinatensystem graphisch dar!

5.2. Alle Minima und alle Maxima der Funktionen f_a liegen je auf einer Geraden. Geben Sie die Gleichungen dieser beiden Geraden an!

5.3. Zeigen Sie, dass je zwei Funktionen der Schar f_a und f_b ($a \neq b$) nur einen gemeinsamen Punkt besitzen und geben Sie die Koordinaten dieses Punktes an!

W6 nichtrationale Funktionen

6. Gegeben ist die Funktion f durch $y = f_a(x) = \frac{a - x^2}{2 \cdot e^x}; (x \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R})$.

Der Graph der Funktion f_a sei G_a .

6.1. Kurvendiskussion

6.1.1. Berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen G_a mit der y -Achse.

6.1.2. Für welche a besitzt f_a 2 Nullstellen? Geben Sie diese Nullstellen in Abhängigkeit von a an!

6.1.3. Für welche a besitzt G_a zwei Extrempunkte? Geben Sie die Minimum- und Maximumstellen in Abhängigkeit von a an!

6.1.4. Skizzieren Sie G_{-4} , G_0 und G_4 in ein gemeinsames Koordinatensystem!

6.2. Betrachtet wird nun die Funktion $y = f_3(x) = \frac{3 - x^2}{2 \cdot e^x}; (x \in \mathbb{R})$.

6.2.1. Skizzieren Sie G_3 in ein (neues) Koordinatensystem!

6.2.2. Zu welchen Funktionswerten c ($c \in \mathbb{R}$) gibt es genau ein Argument?

6.2.3. Ermitteln Sie die Gleichung der Normalen an den Graphen der Funktion in der positiven Nullstelle! Berechnen Sie den Schnittwinkel dieser Normalen mit der x -Achse

6.2.4. Weisen Sie nach, dass $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} \right) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von f ist!

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von G_3 und dem Graphen der Funktion $h(x) = e^{-x}$ vollständig eingeschlossen wird!

W7 Geometrie der Ebene

7. Gegeben ist ein bei A rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Punkten $A(5;-8)$, $B(13;-2)$ und $C(x;x+15)$.
- 7.1. Geben Sie eine Gleichung für den Umkreis k_u des Dreiecks ABC an!
- 7.2. Bestimmen Sie die Gleichungen derjenigen Tangenten an k_u , die senkrecht zu den Dreiecksseiten AC bzw. AB stehen!
Diese 4 Tangenten bilden ein Tangentenviereck $S_1S_2S_3S_4$.
- 7.3. In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte des Dreiecks ABC, des Kreises k_u und des Tangentenvierecks $S_1S_2S_3S_4$?
- 7.4. Stellen Sie das Dreieck ABC, den Kreis k_u und das Tangentenviereck $S_1S_2S_3S_4$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem graphisch dar!
- 7.5. Gegeben ist eine Schar Kreise k_a durch $(x-13)^2+(y+17)^2=a^2$.
- 7.5.1. Für welche a haben die Kreise k_u und k_a keinen, genau einen, zwei gemeinsame Punkte?
- 7.5.2. Geben Sie die Koordinaten der Berührungspunkte für die Fälle an, dass k_u und k_a genau einen gemeinsamen Punkt besitzen!